

**Տիպային սխալների վերլուծությունը հանրահաշվական  
ձևափոխություններում. ԹԱԲ-ից մինչև ֆիզիկական սահմանափակումներ<sup>\*</sup>**

*Նիկողոսյան Գագիկ,  
Մանուկյան Վարդան*

DOI: <https://doi.org/10.58726/27382923-2026.1ns-118>

*Հանգուցային բառեր. նույնականություն, կողմնակի արմատ, անընդհատության  
խզում, մոդելավորում, միջառարկայական կապեր, կրթություն*

**Նախաբան**

Բնագիտամաթեմատիկական կրթության ժամանակակից փուլում առանցքային խնդիրներից մեկը աշակերտների կողմից ուսումնական նյութի ֆորմալ յուրացումն է, որտեղ մաթեմատիկական գործիքակազմը դիտարկվում է որպես մաքուր ավգործիքների հավաքածու՝ գուրկ տրամաբանական և բովանդակային սահմանափակումներից: Այս հիմնախնդրի արդիականությունը պայմանավորված է այն հանգամանքով, որ հանրահաշվական ձևափոխությունների փուլում թույլ տրված անգոյվ վերաբերմունքը թույլատրելի արժեքների բազմության (ԹԱԲ) նկատմամբ հանգեցնում է շղթայական սխալների թե՛ մաթեմատիկայում, թե՛ ֆիզիկայում: Ըստ Լ. Ս. Վիգոտսկու «Մտածողություն և լեզու» աշխատության մեջ զարգացրած թեզի՝ գիտական հասկացությունների ձևավորումը չի կարող սահմանափակվել միայն բառային կամ սիմվոլիկ յուրացմամբ. այն պահանջում է գիտակցված անցում ներքին տրամաբանական կառուցվածքին [2]: Երբ աշակերտը մեխանիկորեն կիրառում է բանաձևը՝ առանց հասկանալու դրա գործողության տիրույթը, տեղի է ունենում հենց այդ բովանդակային խզումը, ինչի մասին խստորեն զգուշացնում էր նաև Լ. Լանդաուն՝ քննադատելով «մաթեմատիկական ֆորմալիզմը», որը կտրված է ֆիզիկական իրականությունից և երևույթի էությունից [5]:

Հետազոտության նպատակն է ցույց տալ, որ մաթեմատիկական ԹԱԲ-ը և ֆիզիկական մոդելի կիրառելիության սահմանները նույն տրամաբանական համակարգի երկու կողմերն են: Մեթոդական տեսանկյունից խնդիրը բարդանում է նրանով, որ գործող առարկայական չափորոշիչներում չնայած շեշտադրվում է կարողունակահեն մոտեցումը, նախատեսված անցումը թվային արտահայտություններից դեպի տառային ձևափոխություններ հաճախ կատարվում է՝ առանց բավարար ուշադրություն դարձնելու «նույնականության» գաղափարին: Ինչպես նշում է Ա. Պ. Կիսելյովը, մաթեմատիկական ցանկացած ձևափոխություն պետք է լինի դարձելի [3], սակայն գործնականում մենք հաճախ առերեսվում ենք իրավիճակների, երբ, օրինակ, հավասարումներում և անհավասարումներում ԹԱԲ-ի անտեսումը բերում է կողմնակի արմատների ի հայտ գալուն: Այս գործընթացում հատկապես կարևոր է եվրոպական դիդակտիկայի ներկայացուցիչ Գայ Բրուստյի «դիդակտիկական պայմանագրի» տեսությունը, համաձայն որի՝ աշակերտը հաճախ փորձում է բավարարել ուսուցչի սպասելիքները՝ կիրառելով

---

<sup>\*</sup> Հետազոտությունն իրականացվել է ՀՀ ԿԳՄՍՆ ԲԳԳԿ-ի ֆինանսական աջակցությամբ՝ 25RG-5C032 ծածկագրով գիտական թեմայի շրջանակներում:

հայտնի բանաձևը, նույնիսկ էթե դրա կիրառման պայմանները խախտված են [8]:

Աշխատանքում շեշտադրվում է այն մոտեցումը, որ հավասարումների և անհավասարումների լուծման ժամանակ ԹԱԲ-ի վերլուծությունը պետք է դիտարկել ոչ թե որպես լրացուցիչ քայլ, այլ որպես լուծման ավգործիքի անբաժանելի մաս: Ըստ Ջ. Պոլայի՝ խնդիրը լուծված համարելու համար անհրաժեշտ է կատարել արդյունքների քննադատական վերլուծություն և ստուգել դրանց իրական լինելը [7]: Եթե հավասարման դեպքում կողմնակի արմատը կարելի է հեռացնել ստուգման միջոցով, ապա անհավասարումների պարագայում, որպես կանոն, սխալն անդառնալի է դառնում: Նմանատիպ խնդիրներ են առաջանում նաև ֆիզիկայում, որտեղ մաթեմատիկական ֆունկցիայի ԹԱԲ-ին գումարվում է մեծությունների ֆիզիկական դրական լինելու պայմանը կամ պրոցեսի անընդհատությունը: Ռ. Ֆեյնմանը իր դասախոսություններում շեշտում էր, որ ֆիզիկական մաթեմատիկա չէ, այն ունի իր սեփական տրամաբանությունը, որտեղ բանաձևը միայն նկարագրության լեզու է [1]: Այսպիսով, Ա. Գ. Մորդկովիչի և Պ. Վ. Մեյնոնովի կողմից նկարագրված հանրահաշվական ստանդարտ մեթոդների կիրառումը [6] պետք է մշտապես գուգորդվի Ժան Պիաժեի կողմից առաջ քաշված կոնստրուկտիվիստական մոտեցմամբ [9], որտեղ սովորողը ոչ թե մեխանիկորեն վերարտադրում է բանաձևը, այլ կառուցում է դրա իմաստային դաշտը:

Այս համատեքստում աշխատանքի գիտամեթոդական նորույթը հանրահաշվական ձևափոխությունների նույնականության պահպանման և ֆիզիկական մոդելավորման սահմանափակումների դիդակտիկական միասնության հիմնավորման մեջ է: Հնդվածում առաջ է քաշվում «ֆունկցիոնալ-բովանդակային ԹԱԲ»-ի հայեցակարգը, որը թույլ է տալիս մաթեմատիկական ձևական ապարատը դիտարկել ոչ թե որպես ինքնաբավ համակարգ, այլ որպես ֆիզիկական իրականության աղեկվատ արտապատկերման գործիք: Հայեցակարգային այս մոտեցման շրջանակներում առանձնահատուկ կարևորվել է մաթեմատիկական ձևափոխությունների ժամանակ առաջացող տրամաբանական «խզումների» և ֆիզիկական համակարգերի «ֆազային անցումների» միջև առկա մեթոդաբանական գուգահեռների վերհանումը: Նման գուգահեռների վերլուծությունը հնարավորություն է տալիս կանխատեսել և կանխարգելել սովորողների կողմից սխալները դեռևս մոդելավորման փուլում, քանի որ հաճախ աշակերտը, տիրապետելով անալիտիկ ձևափոխություններին, դառնում է բանաձևի «գերին» կորցնելով կապը իրական երևույթի հետ:

### **Անալիտիկ ձևափոխությունների ոչ համարժեքությունը**

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում ուսումնական գործընթացը կառուցված է աստիճանական բարդացման սկզբունքով՝ թվային արտահայտություններից դեպի տառային ձևափոխություններ, ապա՝ հավասարումներ և անհավասարումներ: Սակայն այս անցումային փուլում հաճախ անտեսվում է այն հանգամանքը, որ ցանկացած հանրահաշվական ձևափոխություն պետք է լինի նույնական իր թույլատրելի արժեքների բազմության (ԹԱԲ) ներսում: Ձևափոխության մեխանիկական կիրառումը՝ առանց դրա տիրույթի վերահսկման, հանգեցնում է համարժեքության խախտման, ինչն էլ իր հերթին հիմք է դառնում կայուն և տիպային սխալների ձևավորման համար:

Նմանատիպ սխալների շարքում իր տարածվածությամբ առանձնանում է ռացիոնալ արտահայտությունների պարզեցման ընթացքում ԹԱԲ-ի անհարկի ընդլայնումը,

ինչը հատկապես ակնառու է դառնում կոտորակների կրճատման ժամանակ: Երբ աշակերտը կատարում է  $\frac{f(x) \cdot h(x)}{g(x) \cdot h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$  ձևափոխությունը, նա հաճախ այն ըն-

կալում է որպես բացարձակ նույնական ձևափոխություն՝ անտեսելով, որ ստացված նոր արտահայտությունը համարժեք է ելակետայինին միայն  $h(x) \neq 0$  լրացուցիչ պայմանի պահպանման դեպքում:

Այս երևույթի բացասական հետևանքները տարբեր կերպ են դրսևորվում՝ կախված լուծվող առաջադրանքի տեսակից: Հավասարումների պարագայում, օրինակ՝  $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$  դեպքում [4], հավասարման ձախ մասի կոտորակի մեխանիկական կրճատումը հանգեցնում է  $x + 2 = 4$  գծային հավասարմանը, որի միակ լուծումը  $x = 2$  արժեքն է: Թեև այս փուլում արձանագրվում է մեթոդական սխալ, այն դեռևս «վերահսկելի» է աշակերտի համար, քանի որ ստացված արմատի ստուգումը սկզբնական (ելակետային) հավասարման մեջ անմիջապես ի հայտ է բերում հայտարարի գրո դառնալու փաստը, ինչը թույլ է տալիս հաշվի չառնել ստացված կողմնակի արմատը:

Սակայն համարժեքության խախտման վտանգը կարող է անդառնալի լինել անհավասարումների լուծման ընթացքում, որտեղ ստուգման մեթոդը գործնականում կիրառելի չէ: Օրինակ, դիտարկելով նույն արտահայտությունը անհավասարման տեսքով՝  $\frac{x^2 - 4}{x - 2} \leq 5$ , հեշտ է նկատել, որ ԹԱԲ-ի նախնական սահմանման անտեսումը և

անհավասարման ձախ մասի կոտորակի մեխանիկական կրճատումը բերում է  $x + 2 \leq 5$  պարզեցմանը, որի լուծումը հանդիսացող  $(-\infty; 3]$  միջակայքը պարունակում է սկզբնական անհավասարման համար անթույլատրելի  $x = 2$  կետը: Քանի որ անհավասարման պատասխանը բազմություն է, աշակերտը զրկված է պատասխանի մեջ ներառված անթիվ կետերը անհատապես ստուգելու հնարավորությունից: Արդյունքում հանգում ենք վերջնական սխալ պատասխանի, քանի որ ճշմարիտ պատասխանը պետք է լինի  $(-\infty; 2) \cup (2; 3]$  բազմությունը:

Այսպիսով, ԹԱԲ-ի ընդլայնումը կոտորակների կրճատման ժամանակ ոչ թե պարզապես տեխնիկական բացթողում է, այլ տրամաբանական սխալ, որը խաթարում է լուծման ողջ ընթացքը՝ հատկապես այնտեղ, որտեղ արդյունքների ստուգման պարզ մեխանիզմները չեն գործում:

Այս տրամաբանական շղթան էլ ավելի է բարդանում, երբ անցում ենք կատարում լոգարիթմական ձևափոխություններին, որտեղ ԹԱԲ-ի տրանսֆորմացիան տեղի է ունենում աննկատ, բայց վճռորոշ հետևանքներով: Որպես այդպիսին, առանձնահատուկ ուշադրության է արժանի լոգարիթմների գումարից արտադրյալի անցումը՝  $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a (f(x) \cdot g(x))$ : Այստեղ մենք գործ ունենք ԹԱԲ-ի «կույր» ընդլայնման հետ, որը հաճախ դուրս է մնում սովորողի տեսադաշտից:

Եթե սկզբնական արտահայտության մեջ գոյության պարտադիր պայմանը  $f(x) > 0$  և  $g(x) > 0$  խիստ սահմանափակումներն են, ապա ձևափոխված տարբերակում լոգարիթմական ֆունկցիան սկսում է «գոյություն ունենալ» նաև այնտեղ,

որտեղ երկու ֆունկցիաներն էլ բացասական են ( $f(x) < 0$  և  $g(x) < 0$ ), քանի որ նրանց արտադրյալը դառնում է դրական: Այս անցումը ծնում է մի իրավիճակ, երբ մաթեմատիկական ապարատը սկսում է գեներացնել լուծումներ, որոնք սկզբնական հավասարման կամ անհավասարման հետ որևէ տրամաբանական կապ չունեն:

Որպես ասվածի հիմնավորում դիտարկենք  $\log_6(x-1) + \log_6(x-2) = 1$  հավասարումը [4]: Ստանդարտ ալգորիթմով առաջնորդվող աշակերտը, միավորելով լոգարիթմները, ի վերջո ստանում է  $(x-1)(x-2) = 6$  քառակուսային հավասարումը, որի արմատներն են՝  $x_1 = 4$  և  $x_2 = -1$ : Ելակետային հավասարման մեջ ստացված արմատների ստուգման ժամանակ ակնհայտ է դառնում, որ  $x_2 = -1$  արմատը կողմնակի է և այն չպետք է հաշվի առնել:

Անհավասարման դեպքում խնդիրը ստանում է այլ որակ: Ստանդարտ ալգորիթմով առաջնորդվող աշակերտը, դիտարկելով  $\log_6(x-1) + \log_6(x-2) \leq 1$  ելակետային անհավասարումը, միավորելով լոգարիթմները, ի վերջո ստանում է  $(x-1)(x-2) \leq 6$  քառակուսային անհավասարումը: Առանց ԹԱԲ-ի նախնական և խիստ սահմանման, աշակերտը որպես պատասխան կներկայացնի  $x \in [-1; 4]$  բազմությունը, որի մի զգալի մասը՝  $[-1; 2]$  հատվածը բացարձակապես կապ չունի ելակետային  $\log_6(x-2)$  ֆունկցիայի որոշման տիրույթի հետ:

Այսպիսով, եթե հավասարումների լուծման ընթացքում սխալը կարելի է դիտարկել որպես «աշխատանքային» և շտկելի, ապա անհավասարումներում այն վերածվում է հայեցակարգային ձախողման: Սա ևս մեկ անգամ հաստատում է Ջ. Պոյայի այն միտքը, որ մաթեմատիկական խնդրի լուծումը ոչ թե բանաձևերի հաջորդականություն է, այլ տրամաբանական պայմանների անընդհատ վերահսկողություն [7]: Երբ ձևափոխությունը կատարվում է «մեխանիկորեն», ԹԱԲ-ը դադարում է լինել պաշտպանիչ պատնեշ, իսկ վերջինիս անտեսումը դառնում է սխալների հիմնական պատճառ:

### **Ստղեկավորման սահմանափակումները և ֆիզիկական իմաստի տիրույթը փոփոխական պարամետրերով պրոցեսներում**

Ֆիզիկական խնդիրների լուծման գործընթացում մաթեմատիկական ապարատը հանդես է գալիս որպես երևույթի նկարագրության լեզու, սակայն, ինչպես նշում էր Ռ. Ֆեյնմանը, այդ լեզուն ունի իր սեփական տրամաբանությունը, որը միշտ չէ, որ համընկնում է ֆիզիկական օբյեկտի վարքագծի հետ [1]: Այստեղ է, որ հողվածում առաջ քաշված «ֆունկցիոնալ-բովանդակային ԹԱԲ»-ի հայեցակարգը ստանում է գործնական նշանակություն: Այն ենթադրում է, որ ցանկացած մաթեմատիկական արդյունք պետք է անցնի ֆիզիկական «ֆիլտրացիա»՝ հաշվի առնելով մեծությունների բնույթը և պրոցեսի կիրառելիության սահմանները:

#### **➤ Մաթեմատիկական «խզումները» և ֆիզիկական ֆազային անցումները:**

Մեր կողմից տրամաբանական խզումների և ֆազային անցումների միջև առանձնահատուկ կարևորված զուգահեռը ամենից ակնառու դրսևորվում է ջերմային երևույթների մոդելավորման մեջ: Դիտարկենք նյութի տաքացման գործընթացը նկարագրող  $Q = mc\Delta t$  բանաձևը: Մաթեմատիկորեն սա գծային ֆունկցիա է, որտեղ  $Q$  -ն և

$\Delta t$ -ն ուղիղ համեմատական են: Սակայն ֆիզիկական իրականության մեջ գոյություն ունեն կրիտիկական կետեր (հալման կամ եռման ջերմաստիճան), որտեղ մաթեմատիկական այս ֆորմալիզմը դադարում է գործել:

Այստեղ տեղի է ունենում այն, ինչը մենք անվանում ենք «բովանդակային խզում»: Աշակերտը, տիրապետելով բանաձևին, փորձում է հաշվել ջերմաքանակը մի տիրույթում, որտեղ ջերմաստիճանը չի փոխվում ( $\Delta t = 0$ ), բայց էներգիա շարունակվում է հաղորդվել: Առանց գրաֆիկական մոդելի և ֆազային անցման գիտակցման, աշակերտը դառնում է բանաձևի «գերին»՝ ստանալով  $Q = 0$ , ինչը հակասում է երևույթի էությունը: Սա հենց այն կոգնիտիվ սխալն է, որը հնարավոր է կանխարգելել, եթե մաթեմատիկական հավասարումը դիտարկվի իր կիրառելիության «կոնտեքստային ԹԱԲ»-ի ներսում:

➤ **Պարամետրական կախվածությունների «ծուղակները».** *Օհմի և Ջոու-Լենցի օրենքները:*

Ֆիզիկական մոդելավորման մեջ նա մեկ տիպային խնդիր է առաջանում, երբ մաթեմատիկական ձևափոխությունը թվում է նույնական, բայց փոխում է պրոցեսի ֆիզիկական իմաստը: Դասական օրինակ է հաղորդչում անջատված ջերմաքանակի որոշումը.

$$1. \quad Q = I^2 R t,$$

$$2. \quad Q = \frac{U^2}{R} t:$$

Մաթեմատիկորեն այս երկու բանաձևերը համարժեք են՝ հաշվի առնելով Օհմի օրենքը ( $I = U/R$ ): Սակայն, ըստ Լ. Լանդաուի քննադատած «Ֆորմալիզմի» [5], աշակերտը հաճախ չի ընկալում, թե որ պարամետրն է տվյալ համակարգում հաստատուն: Եթե հաղորդիչները միացված են հաջորդաբար ( $I = const$ ), ապա  $Q \propto R$ , իսկ եթե գուգահեռ ( $U = const$ ), ապա  $Q \propto \frac{1}{R}$ :

Մաթեմատիկական ձևափոխությունը՝  $I^2 R = \frac{U^2}{R}$ , ճիշտ է, բայց եթե աշակերտը

չի սահմանում իրավիճակի ֆունկցիոնալ ԹԱԲ-ը (պարամետրերի հաստատուն լինելու պայմանը), նա հանգում է սխալ եզրակացության, թե դիմադրության մեծացումը միշտ բերում է ջերմաքանակի աճի (կամ նվազման):

➤ **Ֆիզիկական մեծությունների սահմանափակումները որպես «ներքին ԹԱԲ»:**

Ինչպես նշել էինք նախաբանում, ըստ **ժան Պիաժեի**, սովորողը պետք է կառուցի իմաստային դաշտը [9]: Ֆիզիկայում դա նշանակում է մաթեմատիկական լուծումը ստուգել ֆիզիկական գոյության պայմաններով:

• **ժամանակի ոչ բացասական լինելը:** Քառակուսային հավասարման լուծման արդյունքում ստացված  $t = -5$  վայրկյանը մաթեմատիկորեն անթերի է, սակայն ֆիզիկական իրականության մեջ այն հաճախ գտնվում է դիտարկվող պրոցեսի սկզբնակետից դուրս (այսինքն՝ ֆիզիկորեն գտնվում է «ԹԱԲ-ից դուրս»): Սա աշակերտից պահանջում է գիտակցված ընտրություն՝ մաթեմատիկական լուծումների բազմությունից գատնելու ֆիզիկական իմաստ ունեցող արժեքը:

• **Բացարձակ ջերմաստիճանի սահմանը:** Իդեալական գազի վիճակի հավասար-

ման ( $PV = nRT$ ) կամ ջերմային մեքենաների ՕԳԳ-ի հաշվարկման ժամանակ Կելվինի սանդղակը դնում է սկզբունքային արգելք՝  $T \geq 0$  Կ: Եթե մաթեմատիկական ձևափոխությունների արդյունքում (օրինակ՝ ջերմային հաշվեկշռի հավասարումը լուծելիս) ստացվում է բացասական արժեք, դա ոչ թե պարզապես «թիվ» է, այլ ազդանշան այն մասին, որ կա՛մ հաշվարկն է սխալ, կա՛մ ընտրված մոդելը տվյալ պայմաններում գոյություն ունենալ չի կարող:

• **Լույսի արագության սահմանափակումը:** Դինամիկայի խնդիրներում արագության համար ստացված ցանկացած արժեք, որը գերազանցում է  $c \approx 3 \cdot 10^8$  մ/վ-ը, ազդանշան է այն մասին, որ կիրառված մոդելը (նյութոսկան մեխանիկա) տվյալ տիրույթում այլևս ադեկվատ չէ: Այստեղ մաթեմատիկական ԹԱԲ-ը վերածվում է մեթոդաբանական սահմանի, որից այն կողմ անհրաժեշտ է անցում կատարել ռելյատիվիստական ֆիզիկայի տիրույթ:

Այսպիսով, մեր կողմից առաջարկվող «դիդակտիկական միասնությունը» պահանջում է, որ աշակերտը ոչ թե լուծի հավասարումը և հետո «հարմարեցնի» այն ֆիզիկային, այլ լուծման յուրաքանչյուր քայլում գիտակցի ֆիզիկական սահմանափակումը որպես բովանդակային-մաթեմատիկական հավելյալ արգելք: Սա թույլ է տալիս հաղթահարել Գայ Բրոուսի նկարագրած «դիդակտիկական պայմանագիրը» [8], որտեղ աշակերտը պարզապես բավարարում է ուսուցչի սպասելիքը՝ թիվ ստանալով, և անցնել իրական գիտական մտածողության, որտեղ թիվը երևույթի արտացոլումն է:

### Եզրակացություն

Կատարված վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ մաթեմատիկական և ֆիզիկական կրթության միջև առկա «խզումը» հիմնականում հետևանք է ԹԱԲ-ի և մոդելի կիրառելիության սահմանների անջատ դիտարկման: Հոդվածում հիմնավորված «ֆունկցիոնալ-բովանդակային ԹԱԲ»-ի ներդրումը թույլ է տալիս ձևավորել սովորողի վերլուծական մտածողությունը հետևյալ ուղղություններով.

1. **մաթեմատիկական զգոնություն.** ցանկացած ձևափոխություն պետք է ուղեկցվի ԹԱԲ-ի փոփոխության մշտական վերահսկողությամբ՝ խուսափելու համար ոչ համարժեք ձևափոխություններից և կողմնակի արմատներից,

2. **ֆիզիկական ադեկվատություն.** մաթեմատիկական ապարատը պետք է ծառայի ֆիզիկական իրականությանը՝ հաշվի առնելով մեծությունների բնույթից բխող սահմանափակումները,

3. **մեթոդաբանական միասնություն.** տրամաբանական «խզումների» և ֆիզիկական «ֆազային անցումների» միջև տարված զուգահեռը հնարավորություն է տալիս ստեղծելու ուսուցման միասնական մոդել, որտեղ սովորողը տեսնում է բանաձևի հետևում թաքնված իրական պրոցեսը:

Հանդգնված ենք, որ վերջնարդյունքում, նման մոտեցումը նպաստելու է ոչ թե ֆորմալ գիտելիքի կուտակմանը, այլ գիտակցված կարողունակությունների ձևավորմանը, ինչը ժամանակակից բնագիտական կրթության գլխավոր նպատակն է:

DOI: <https://doi.org/10.58726/27382923-2026.1ns-118>

## Գրականություն

1. Ֆեյնման Ռ., Ֆիզիկական օրենքների բնույթը, Երևան, «Զանգակ» հրատարակչություն, 2021, 240 էջ:
2. Выготский Л. С. Мышление и речь. Москва, Соцэкгиз. 1934, 324 с.
3. Киселев А. П., Алгебра. Ч II. Москва: ФИЗМАТЛИТ. 2005, 248 с.
4. Куланин Е. Д., Норин В. П., Федин С. Н., Шевченко Ю. А. 3000 конкурсных задач по математике. 7-11 классы. Москва: Айрис-пресс. 2003, 624 с.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц, Е. М. Курс теоретической физики. Том 1. Механика. Москва: Наука. 1988, 216 с.
6. Мордкович А. Г., Семенов П. В. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). Часть 1. Учебник. Москва, Мнемозина. 2009, 424 с.
7. Пойа Д. Как решать задачу? Москва, Учпедгиз. 1959. 208 с.
8. Brousseau G. Theory of Didactical Situations in Mathematics, Kluwer Academic Publishers. 1997. 304 p.
9. Piaget J. Genetic Epistemology. Columbia University Press. 1970, 84 p.

### **Анализ типичных ошибок в алгебраических преобразованиях: от ОДЗ до физических ограничений**

*Никогосян Гагик,  
Манукян Вардан*

#### **Резюме**

**Ключевые слова:** *тождество, посторонний корень, разрыв непрерывности, моделирование, межпредметные связи, образование*

В статье рассматривается одна из важнейших проблем естественно-математического образования - формальное усвоение учебного материала и пути его преодоления. В работе подчеркивается, что игнорирование области допустимых значений (ОДЗ) в процессе алгебраических преобразований может привести не только к математическим ошибкам, но и к искаженному восприятию физической реальности.

Научно-методическая новизна работы заключается в выдвигании концепции «функционально-содержательной ОДЗ», объединяющей идентичность формального математического аппарата и ограничения физического моделирования. В статье подробно анализируются типичные ошибки, возникающие вследствие игнорирования ОДЗ, на примере дробных и логарифмических выражений. Показано, что если в уравнениях посторонние корни можно отсеять путем проверки, то в неравенствах нарушение равносильности приводит к необратимым потерям.

В физическом разделе обосновывается методологическая параллель между логическими «разрывами» и «фазовыми переходами» физических систем. На примерах закона Ома, тепловых явлений и фундаментальных констант (абсолютная температура, скорость света) демонстрируется, как область физического смысла выступает в роли естественного фильтра для математических решений. В работе обосновано, что анализ ОДЗ является не вспомогательным шагом, а неотъемлемым компонентом алгоритма решения. Такой подход позволяет учащемуся преодолеть формульный «формализм» и сформировать целостную научную картину явления.

## **Analysis of Typical Errors in Algebraic Transformations: From the Domain of Admissible Values to Physical Constraints**

***Nikoghosyan Gagik,  
Manukyan Vardan***

### **Summary**

***Key words:*** *identity, extraneous root, discontinuity, modeling, interdisciplinary connections, education*

The article examines one of the most critical issues in science and mathematics education: the formal assimilation of instructional material and the methods to overcome it. The study emphasizes that disregarding the domain of admissible values (DAV) during algebraic transformations can lead not only to mathematical errors but also to a distorted perception of physical reality.

The scientific and methodological novelty of the work lies in the introduction of the “functional-semantic DAV” concept, which integrates the identity of the formal mathematical apparatus with the constraints of physical modeling. The article provides detailed analysis of typical errors resulting from the neglect of the DAV, using examples of fractional and logarithmic expressions. It is demonstrated that while extraneous roots in equations can be eliminated through verification, the breach of equivalence in inequalities leads to irreversible losses.

In the physics section, a methodological parallel is established between logical “discontinuities” and the “phase transitions” of physical systems. Using examples such as Ohm’s law, thermal phenomena, and fundamental constants (absolute temperature, the speed of light), it is shown how the domain of physical meaning serves as a natural filter for mathematical solutions. The study substantiates that the analysis of the DAV is not a supplementary step but an essential component of the solution algorithm. This approach enables the learner to overcome formulaic “formalism” and construct a comprehensive scientific understanding of the phenomenon.

**Ներկայացվել է 26. 04. 2026 թ.**

**Գրախոսվել է 13. 04. 2026 թ**

**Ընդունվել է տպագրության 27. 05. 2026 թ.**